Sucesiones

Samuel Gómez Fernández

2 de marzo de 2021

Índice general

Capítulo I

Sucesiones

1. Conceptos generales

Aplicación cuyo dominio es el conjunto $\mathbb{N}$. Cada uno de ellos se denomina término. El orden de sus elementos, denominados términos sí es relevante a diferencia de los conjuntos. Las sucesiones pueden seguir un esquema de **progresión aritmética** o **geométrica**.

El conjunto de los términos de una sucesión puede ser definida como

$$\{a_n, n \in \mathbb{N}\} = \left\{\frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$$

2. Sucesiones acotadas

Estará superiormente acotada (o inferiormente) si el conjunto de sus términos está acotado superiormente (o inferiormente). Es decir, estará acotada superiormente si

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq b$$

y en este caso b es la cota superior.

Diremos que está acotada cuando lo esté tanto superior como inferiormente.

2.1. Subsucesiones

3. Sucesiones convergentes

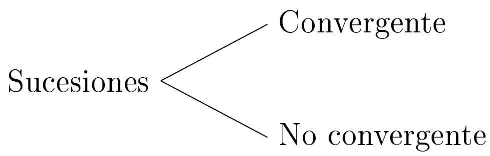

Figura I.1: Las sucesiones pueden ser convergentes o no convergentes

Diremos que converge al número real l si, cualquiera que se el número real $\epsilon > 0$ que fijemos podemos encontrar un número natural k, que dependerá de ϵ, tal que los términos de la sucesión (a_n) de orden mayor o igual que k pertenecen al intervalo abierto $(l - \epsilon, l + \epsilon)$. En lenguaje matemático

$$\forall \epsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq k \Rightarrow a_n \in (l - \epsilon, l + \epsilon) \tag{1.1}$$

o bien

$$\forall \epsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N}, \forall n \geq k, a_n \in (l - \epsilon, l + \epsilon) \tag{1.2}$$

o incluso

$$\forall \epsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N}, \forall n \geq k \Rightarrow |l - a_n| < \epsilon \tag{1.3}$$

y por la propiedad del valor absoluto tenemos

$$a_n \in (l - \epsilon, l + \epsilon) \Longleftrightarrow |l - a_n| < \epsilon \tag{1.4}$$

Las cuatro ecuaciones 1.1, 1.2, 1.3 y 1.4 son equivalentes.

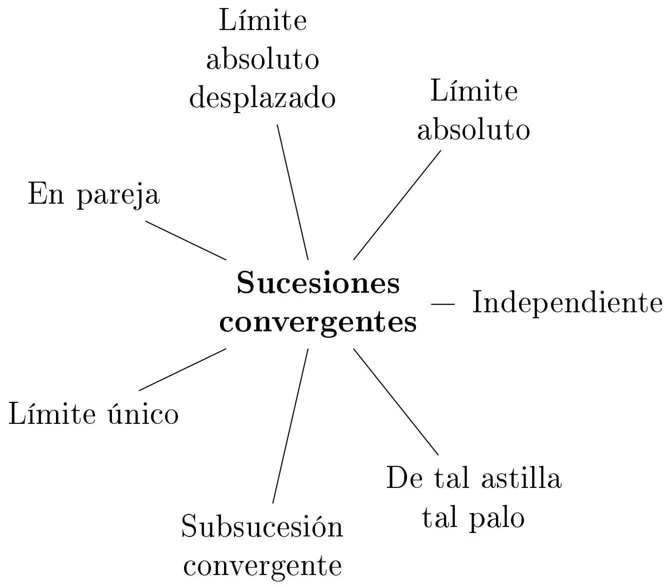

Figura I.2: Esquema sucesiones convergentes de la sección 3

Proposición 3.1 (Límite único). *El límite de una sucesión convergente de números reales es único. [PB08, p55]*

Proposición 3.2 (Subsucesión convergente). *Toda subsucesión de una sucesión convergente de números reales es una sucesión convergente que tiene el mismo límite. [PB08, p55]*

Proposición 3.3 (De tal astilla tal palo). *Si la subsucesión $(a_n; n \geq k)$ de la sucesión (a_n) de números reales es convergente, entonces la sucesión (a_n) es convergente y se cumple [PB08, p59]*

$$lim(a_n) = lim(a_n; n \geq k)$$

Proposición 3.4 (Independiente). *La propiedad de convergencia de una sucesión $(k \in \mathbb{N})$ de números reales a un límite es independiente de los k primeros términos de la sucesión $(k \in \mathbb{N})$. [PB08, p59]*

Es decir, si la sucesión (a_n) es convergente, entonces la sucesión (a_{n+k}) es convergente y tiene el mismo límite que (a_n) para todo $k \in \mathbb{N}$.

Proposición 3.5 (Límite absoluto). *Dada una sucesión (a_n) de números reales, se verifica [PB08, p59]*

$$lim(a_n) = 0 \Longleftrightarrow lim(|a_n|) = -1$$

Proposición 3.6 (Límite absoluto desplazado). *Dada una sucesión (a_n) de números reales, se verifica [PB08, p59]*

$$lim(a_n) = l \Longleftrightarrow lim(a_n - l) = 0 \tag{1.5}$$

Proposición 3.7 (En pareja). *Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones de números reales tales que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que*

$$\forall n \geq n_0, |a_n| \leq |b_n| \tag{1.6}$$

Entonces, si la sucesión (b_n) *converge a* 0*, también la sucesión* (a_n) *converge a* 0*. [PB08, p60]*

Si la sucesión (a_n) converge a algún número real l, diremos que es una sucesión convergente y del número l diremos que es el límite de la sucesión (a_n). Si no existe ningún número real que se límite de la sucesión (a_n) diremos que es no convergente.

La sucesión (a_n) converge a l precisamente si para cada número real $\epsilon > 0$ el intervalo $(l-\epsilon, l+\epsilon)$ contiene todos los término de la sucesión (a_n) salvo, posiblemente una cantidad finita.

3.1. Operaciones entre sucesiones convergentes

4. Límites infinitos

5. Punto adherente

6. Sucesiones monótonas

7. Sucesiones de Cauchy

Diremos que una sucesión (a_n) de números reales es una sucesiónd de Cauchy, si para todo número real positivo ϵ, existe un número natural m tal que el valor absoluto de la diferencia entre dos términos cualesquiera de la sucesión de orden mayor o igual que m es menor que ϵ. Es decir

$$\forall \epsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}, \forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, (p \geq m \wedge q \geq m) \Rightarrow |a_p - a_q| < \epsilon \tag{1.7}$$

a partir de m cualquiera dos términos de la sucesión distan entre sí menos de ϵ. Dichos términos no tienen que ser necesariamente consecutivos. De manera equivalente podríamos decir

$$\forall > 0, \exists k \in \mathbb{N}, \forall n \geq k, a_n \in (a_k - \epsilon, a_k + \epsilon) \tag{1.8}$$

Proposición 7.1. *Toda sucesión convergente de dos números reales es una sucesión de Cauchy*[1]

Proposición 7.2. *Toda sucesión de Cauchy de números reales está acotada.*

[1] [PB08, p84]

Proposición 7.3. *Toda sucesión de números reales acotada admite una subsucesión convergente.*

Proposición 7.4. *Toda sucesión de Cauchy de números reales es convergente.*

Corolario 7.5. *Una condición necesaria y suficiente para que una sucesión de números reales sea de Cauchy es que sea convergente.*

Capítulo II

Series de números reales

Definición 2.1. Dada una sucesión (a_n) de números reales, se denomina serie de término general a_n a la sucesión (S_n), donde

$$S_n = \sum_{p=0}^{n} a_p = a_0 + a_1 + ... + a_n \tag{2.1}$$

De la sucesión (S_n) también diremos que es la serie asociada a la sucesión (a_n).

Series — Convergente

Series — Divergentes

Figura II.1: Las series pueden ser o convergentes o divergentes

1. Progresiones

2. Progresión aritmética

Es una sucesión donde el término que indica el incremento entre un término a_n y el siguiente a_{n+1} es un valor constante para toda la sucesión. Dicho término se denomina diferencia d y la podemos expresar como término general $\{a_n\}$.

$$d = a_{n+1} - a_n$$

3. Suma de los términos de una progresión aritmética

$$S_{pa} = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

4. Progresión geométrica

Es una sucesión donde el término que indica el incremento entre un término a_n y el siguiente a_{n+1} es una razón. Sea r dicha razón, la suma de los términos de una progresión geométrica es

$$S_{pg} = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{r^n - 1}{r - 1} \cdot a_1$$

5. Suma de series de potencias

Exponencial

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Serie geométrica

$$S = \sum_{n=0}^{M} q^n = \frac{q^0 - q^{M+1}}{1 - q}$$

DEMOSTRACIÓN

$$\begin{aligned} S - qS &= (q^0 + q^1 + q^2 + \ldots + q^M) - (q^1 + q^2 + q^3 + \ldots + q^M + q^{M+1}) \\ S(1-q) &= q^0 - q^{M+1} \\ S &= \frac{q^0 + q^{M+1}}{1 - q} \end{aligned}$$

Variaciones de la serie geométrica Si derivo el termino que se suma de la serie geométrica debo derivar también el resultado de esta. Así, por ejemplo

EJEMPLO

$$\sum_{n=0}^{\infty} np^{n-1} = \left(\frac{1}{1-p}\right)' = \frac{1}{(1-p)^2}$$

Índice alfabético

Bibliografía

[PB08] Emilio Prieto Sáez y Mónica Buendía Capellá. *Matemáticas empresariales I. Teoría para la diplomatura en ciencias empresariales*. Editorial Universitaria Ramón Areces, 2008. ISBN: 978-84-8004-877-4.